Ejercicios de Matemáticas I - Relación 5

1. Calcula en cada caso el valor de a y b en función de c, para que exista la derivada en el punto c de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant c \\ ax + b, & x > c \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x| > c \\ a + bx^2, & |x| \leqslant c \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant c \\ ax + b, & x > c \end{cases}$$

2. Supongamos que las funciones f y g y sus derivadas tienen los valores que se indican en la tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	3	2	5	-5
1	1	0	-2	1
2	2	3	2	1
3	0	1	4	-6

Calcula una tabla análoga para las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

3. Sean f, g funciones derivables y que pueden componerse y sea $h = f \circ g$. Supongamos que:

$$g(1) = 3,\ g'(1) = 2,\ f'(3) = -1,\ g''(1) = 1,\ f''(3) = -2.$$

Calcula $h'(1)$ y $h''(1)$.

4. Calcula las derivadas primera y segunda de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

¿Qué puedes decir de la derivada tercera?

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)$
2) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)$
3) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2 \cos x))$
4) $f(x) = \cos^2(\operatorname{sen}^2 x)$
5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{2 - \cos x}}$
6) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}\right)$
7) $f(x) = (2 + \operatorname{sen}^2 x)^{\operatorname{arc\,tg} x}$
8) $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(1/x)$
9) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
10) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

6. Calcula un punto c por la condición de que la tangente a la parábola $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ en el punto $(c, f(c))$, sea paralela a la cuerda que une dos puntos dados $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$.

7. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto genérico (u, v) de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$.

8. Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto genérico (u, v) de la elipse de ecuación cartesiana
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

9. Calcula los puntos (u, v) de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ en los que la tangente a dicha hipérbola pasa por el punto $(5, 7)$.

10. ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?

11. Se está llenando un globo de forma esférica con gas a razón de 50cm^3/s. Calcula la velocidad a la que está aumentando el radio, r, del globo cuando su valor es $r = 5$.

12. Un punto P se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5cm/sg. Calcula la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$.

13. Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

14. El volumen de un cubo está aumentando a razón de 70cm^3 por minuto. ¿Con qué rapidez está aumentando el área cuando la longitud del lado es de 12cm?

15. Un barco A se desplaza hacia el oeste con una velocidad de 20 millas por hora y otro barco B avanza hacia el norte a 15 millas por hora. Ambos se dirigen hacia un punto O del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos A y B al punto O son, respectivamente, de 15 y de 60 millas, se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido 2 horas? ¿En qué momento están más próximos uno de otro?

16. Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de 50cm^3 por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15cm?

17. Un hombre se aleja de una farola a razón de 1,2m/sg. Sabiendo que la altura del hombre es de 1,8 metros y la de la farola de 5 metros, calcula la velocidad a la que está aumentando la sombra del hombre proyectada por la luz.

18. Claudia se aleja de una farola cuya altura es 340cm. Calcula la altura de Claudia sabiendo que el extremo de la sombra de Claudia se aleja de la farola con el doble de la velocidad con que lo hace Claudia.

19. Un faro, cuya linterna gira a 8 revoluciones por minuto, se encuentra situado a 3 kilómetros de una costa rectilínea. Calcula la velocidad con que el rayo de luz recorre la orilla cuando el ángulo de incidencia del rayo de luz con la línea de la costa es de 45 grados.

20. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3 - 6x - 2$ se anula en al menos tres puntos del intervalo $[-3, 3]$.

    b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha función no puede anularse en más de tres puntos.

21. Justifica que la ecuación
$$3^x - x^3 - \frac{6}{5} = 0$$
tiene exactamente cuatro soluciones reales.

22. Justifica que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones reales.

23. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$ según los valores de α.

24. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ y $0 < a < b$. Prueba que

$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

25. Sean $0 < x < y$. Prueba que

$$\frac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{arc\,tg} y - \operatorname{arc\,tg} x < \frac{y-x}{1+x^2}$$

26. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \ln(1+x).$$

¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad anterior?

27. Prueba que para todo $x \in]0, \pi/2[$ se verifica que:

$$i)\ 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x\,; \quad ii)\ \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

28. Calcula los límites siguientes.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{\operatorname{sen}^3 x}; \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(x^2)}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\ln(1+2x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x \operatorname{sen} x}; \qquad \lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x + \cos x)^{1/x}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{1/x^2}; \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen} x - 3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x^2}; \qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

29. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determina el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

30. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que tenga área máxima.

31. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

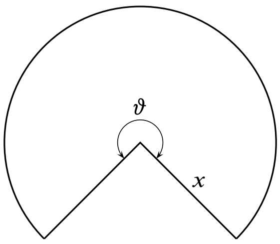
32. Con una lámina metálica rectangular de $12 \times 18\mathrm{cm}^2$ se quiere construir una caja sin tapa cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse.

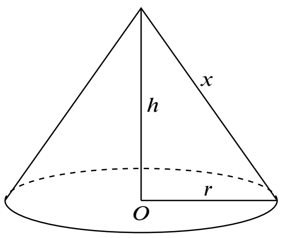
33. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?.

34. Se quiere imprimir un cartel cuya área total debe ser 6000cm^2 con márgenes de impresión laterales de 6cm y márgenes arriba y abajo de 10cm. Calcula las dimensiones que maximizan el área de impresión.

35. Calcula el ángulo de inclinación que deben tener las paredes de un canal con forma de trapecio isósceles cuyas base inferior mide 4m y las paredes laterales 2m para que su área sea máxima. Calcula dicho valor máximo.

36. Para hacer una tienda de campaña cónica de un volumen determinado, V, necesitamos cortar un sector circular de lona como se indica en la figura donde ϑ es la medida en radianes del ángulo central del sector y x la medida del radio. Calcula las dimensiones de la tienda para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.





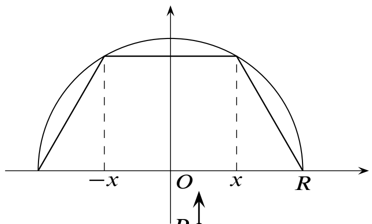
37. En un cono circular recto de radio en la base r y altura h, el volumen viene dado $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ y el área de su superficie por $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$. Calcula las dimensiones del cono que teniendo área superficial igual a 1 tiene volumen máximo.

38. a) Calcula un punto de la parábola $y = x^2$ cuya distancia al punto $(6, 3)$ sea mínima.

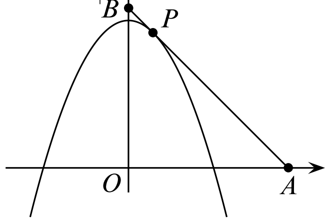
    b) Calcula un punto de la parábola $y = x^2$ tal que la normal en dicho punto pase por el punto $(6, 3)$.

39. Dados los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (2, 2)$, calcula cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

40. Calcula las dimensiones del trapecio isósceles de área maxima inscrito en la semicircunferencia superior centrada en el origen de radio R. Justifica que el resultado obtenido es un máximo absoluto.

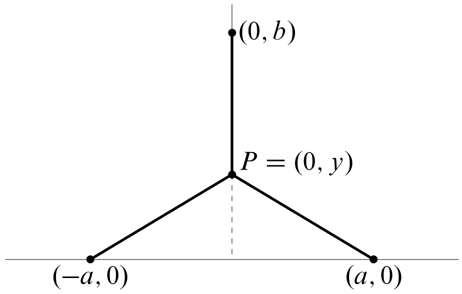


41. Calcula un punto $P = (u, v)$, con $u > 0$, de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo OAB determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.



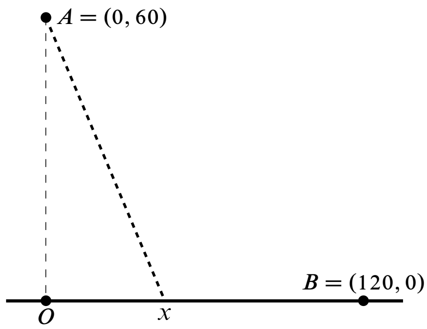
42.

Dos fábricas están situadas en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y en $(0, b)$ hay una central eléctrica. Calcula el punto $P = (0, y)$ para que la longitud total del tendido eléctrico desde la central a las fábricas sea mínimo. Debes discutir el resultado según los valores de a y de b.



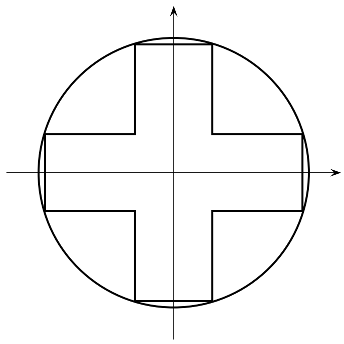
43.

Estás en el desierto con tu vehículo en medio de la arena situado en un lugar cuyas coordenadas son $A = (0, 60)$ y tienes que ir a una ciudad cuyas coordenadas son $B = (120, 0)$. Por el origen $O = (0, 0)$ y por la ciudad B pasa una carretera recta asfaltada que los une. En carretera tu velocidad es de 120 kilómetros por hora y sobre la arena es de 80 kilómetros por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a B?



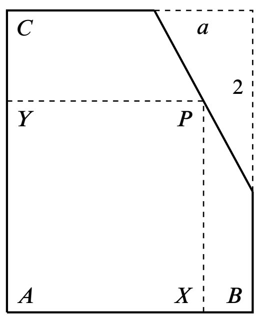
44.

Calcula el área maxima de una cruz cuyos lados tienen la misma anchura inscrita en una circunferencia de radio R.

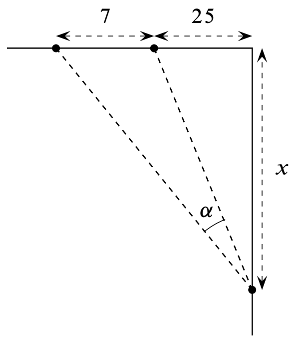


45.

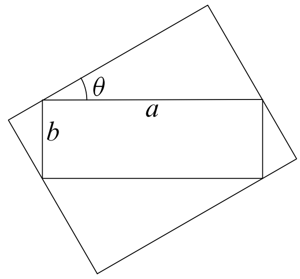
La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$ y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que a es un valor conocido. Se pide calcular un punto P sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices A, X, P, Y tenga área máxima. ¿Para qué valor de a se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?



46. Un futbolista avanza con el balón hacia la portería contraria por el borde del campo. ¿A qué distancia, x, de la línea de meta debe tirar a puerta para que el ángulo de tiro, α, sea máximo?



47. Calcula el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado cuyos lados tiene longitudes a y b.



48. Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-3} en cada uno de los casos siguientes:

$$a)\ \alpha = \sqrt[3]{7} \quad b)\ \alpha = \sqrt{e} \quad c)\ \alpha = \operatorname{sen}\frac{1}{2} \quad d)\ \alpha = \operatorname{sen}(61^\circ)$$

49. Calcula los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2\operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-2x)$ en el intervalo $[-1, 3]$.

e) $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

f) $f(x) = x^a - x^b$ en el intervalo $[0, 1]$ donde se supone que $0 < a < b$.

g) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x-1|} + \dfrac{1}{1+|x-4|}$ en el intervalo $[-5, 5]$.

50. Sea $f(\vartheta) = 2\operatorname{sen} 2\vartheta + \operatorname{sen} 4\vartheta$.

a) Prueba que ϑ es un punto crítico de f si $\cos 4\vartheta = -\cos 2\vartheta$.

b) Prueba, usando la circunferencia unidad, que $cos\vartheta_1 = -cos\vartheta_2$ si, y sólo si, $\vartheta_1 = \pi \pm \vartheta_2 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

c) Prueba que $\cos 4\vartheta = -cos 2\vartheta$ si, y sólo si, $\vartheta = \pi/2 + k\pi$ o $\vartheta = \pi/6 + k\pi/3$.

d) Calcula los puntos críticos de f en $[0, 2\pi]$ y calcula el conjunto de los valores que toma f en dicho intervalo.